Piège à c...harges.

On dit qu'une particule élémentaire de masse m et de charge q, de poids négligeable devant la force de Lorentz, est piégée si ses coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ restent bornées quelles que soient les conditions initiales.

Question 1 :
Montrer qu'un champ magnétique uniforme et stationnaire est incapable de piéger une particule. On admettra que ce résultat se généralise pour tout champ magnétique stationnaire, en l'absence de champ électrique.

On reconnaît, à peine déguisé sous un maquillage sommaire, le problème classique du mouvement d'une charge dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. En choisissant Oz parallèle au champ, on note $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{e_z}$ et

$$m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

$$m\,(\ddot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}) = q\,(\dot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{e_z}) \wedge B\,\overrightarrow{e_z}$$

soit en projetant

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = q\,B\,\dot{y} \\ m\,\ddot{y} = -q\,B\,\dot{x} \\ m\,\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Inutile de résoudre tout ce système pour répondre à la question posée : la résolution de la dernière équation en notant z_0 et $\dot{z}_0$ les valeurs initiales de z et $\dot{z}$ conduit à :

$$z(t) = \dot{z}_0\,t + z_0$$

et z(t) n'est borné que si $\dot{z}_0$ est nul donc pour une condition initiale particulière. la particule n'est donc pas piégée.

J'entends une petite voix qui murmure «comment résout-on déjà les deux premières équations ?» Ne la laissons pas sans réponse.

La méthode la plus élégante consiste à introduire une variable complexe $\zeta(t) = \dot{x}(t) + \imath\,\dot{y}(t)$ (Attention ! Rien à voir avec une amplitude complexe : ici $\mathfrak{Re}(\zeta) = \dot{x}$ et $\mathfrak{Im}(\zeta) = \dot{y}$) puis à ajouter à la première équation la deuxième, préalablement multipliée par $\imath$:

$$m\,(\ddot{x} + \imath\,\ddot{y}) = q\,B\,(\dot{y} - \imath\,\dot{x}) = q\,B\,(-\imath^2\,\dot{y} - \imath\,\dot{x}) = -\imath\,q\,B\,(\dot{x} + \imath\,\dot{y})$$

$$m\,\dot{\zeta} = -\imath\,q\,B\,\zeta$$

que l'on résout aisément en :

$$\zeta(t) = \dot{x}(t) + \imath\,\dot{y}(t) = \zeta_0\,\exp\left(-\imath\,\frac{q\,B\,t}{m}\right)$$

On peut choisir les axes de sorte que ζ_0 soit réel (on notera plutôt v_0 dans ce cas)

$$x(t) = \mathfrak{Re}\zeta(t) = v_0\,\cos\left(\frac{q\,B\,t}{m}\right)$$

$$y(t) = \mathfrak{Im}\zeta(t) = -v_0\,\sin\left(\frac{q\,B\,t}{m}\right)$$

Et une seconde intégration, en choisissant l'origine à la position initiale de la charge, donne :

$$x(t) = \frac{m\,v_0}{q\,B}\,\sin\left(\frac{q\,B\,t}{m}\right)$$

$$y(t) = \frac{m\,v_0}{q\,B}\left[\cos\left(\frac{q\,B\,t}{m}\right) - 1\right]$$

La pulsation $\omega_c = q\,B/m$ qui apparaît ici est traditionnellement appelée «pulsation cyclotron» pour la simple raison qu'un cyclotron est un dispositif dans lequel on fait justement tourner en rond des charges grâce à un champ magnétique au lieu qu'elles s'en aillent bêtement tout droit à l'infini.

Question 2 :

On considère maintenant une unique particule positive placée, en l'absence de champ magnétique dans un champ électrique stationnaire $\overrightarrow{E}(x, y, z)$ ***dérivant du potentiel électrique*** $V(x, y, z)$***. Par une approche énergétique, justifier — sans calculs — que la particule est piégée près de l'origine*** O ***si le potentiel y est maximal. Qu'en déduit-on pour les dérivées premières et secondes de*** V ***? Montrer, en pensant à l'équation de Maxwell-Gauss, que c'est impossible à réaliser.***

L'énergie d'une particule en interaction avec un champ est $\mathcal{E} = -q\,V$. Si cette énergie est minimale en O donc V maximal, alors O est position d'équilibre stable et la particule sera rappelée vers O si elle s'en écarte, ça ressemble diantre bien à un piégeage. V est maximal en O si ses dérivées premières y sont nulles et ses dérivées secondes strictement négatives.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} < 0$$

La charge q est la seule dans la région ; à elle seule, elle ne crée pas de densité volumique de charge appréciable donc $\rho = 0$ et

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 = \operatorname{div}\overrightarrow{E} = -\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V\right) = -\Delta V = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$$

ce qui est incompatible avec des dérivées secondes strictement négatives.

Question 3 :

On considère le champ dérivant du potentiel $V(x, y, z) = V_0 - a\,(x^2 + y^2) + b\,z^2$***. Montrer que*** $b = 2\,a$***. Calculer le champ électrique correspondant. On admettra qu'un tel champ est celui qui règne dans un condensateur dont les deux armatures sont des hyperboloïdes de révolution, l'un à une nappe, l'autre à deux nappes, belle occasion de relire son cours de géométrie.***

Trop facile ! Comme ci-dessus $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ et donc, tous calculs faits :

$$-2\,a - 2\,a + 2\,b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2\,a$$

donc on a

$$V = V_0 - a\,x^2 - a\,y^2 + 2\,a\,z^2$$

$$\overrightarrow{E} = \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = 2\,a\,x \\[2ex] E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = 2\,a\,y \\[2ex] E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = -4\,a\,z \end{cases}$$

On aura bien sûr remarqué que les dérivées premières, donc le champ aussi, sont nulles en O qui est alors position d'équilibre, certes instable ;

Question 4 :

On superpose au champ électrique précédent un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{e_z}$. Mettre en équations le mouvement de la charge et résoudre dans le cas général. A quelle condition la particule est-elle piégée ? Décrire le mouvement.

Cette fois
$$m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = q\,(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

et les calculs se mènent comme ci-dessus, on projette :

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = q\,B\,\dot{y} + 2\,q\,a\,x \\ m\,\ddot{y} = -q\,B\,\dot{x} + 2\,q\,a\,y \\ m\,\ddot{z} = -4\,q\,a\,z \end{cases}$$

Pour $z(t)$, on trouve, si a est positif, un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_0 avec $\omega_0^2 = 4\,q\,a/m$, sinusoïdal donc borné. Si a est négatif, le mouvement est exponentiel donc non borné : le piège n'est possible qu'avec a positif, ce que nous supposons désormais.

Sur Oxy, introduisons la variable $\xi = x(t) + \imath\,y(t)$, réalisons la même combinaison linéaire que plus haut, en posant $\omega_c = q\,B/m$ (pulsation«cyclotron»), on arrive aisément à

$$\ddot{\xi} = -\imath\,\omega_c\,\dot{\xi} + \frac{1}{2}\,\omega_0^2\,\xi$$

$$\ddot{\xi} + \imath\,\omega_c\,\dot{\xi} - \frac{1}{2}\,\omega_0^2\,\xi = 0$$

qui est une équation linéaire homogène dont les solutions sont combinaisons linéaires d'exponentielles dont les coefficients sont solutions de

$$X^2 + \imath\,\omega_c\,X - \frac{1}{2}\,\omega_0^2 = 0$$

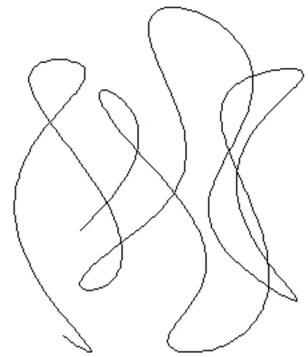
dont le discriminant est
$$\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_0^2$$

qui est réel. S'il est positif, l'une des racines est $-\imath\,\omega_c/2 + \sqrt{\Delta}/2$ qui correspond à

$$\xi(t) = \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}\,t}{2}\right)\,\exp\left(\imath\,\frac{\omega_c\,t}{2}\right)$$

c'est-à-dire à une pseudo-sinusoïde d'amplitude croissant exponentiellement : le mouvement n'est pas borné. A l'inverse si Δ est négatif, les solutions de l'équation résolvante sont les imaginaires purs $-\imath\,\omega_c/2 \pm \imath\,\sqrt{(-\Delta)}/2$ qui correspondent à ξ exponentiel imaginaire et donc $x(t)$ et $y(t)$ respectivement un cosinus et un sinus : il s'agit d'un mouvement circulaire, donc borné. On veut donc Δ négatif, soit $2\,\omega_0^2$ inférieur à ω_c^2 et a inférieur à
$$a_c = \frac{m\,\omega_c^2}{8\,q}$$

Le mouvement complet combine dans le plan xOy deux mouvements circulaires de vitesses et rayons différents (cf les manèges de la foire du Trône) et un mouvement sinusoïdal selon Oz. La figure qui suit :



en est, en perspective, un exemple arbitraire mais plutôt esthétique.